CULCYT. Cultura Científica y Tecnológica
Vol. 21 | N.º 3 | Septiembre-Diciembre 2024 | PP 90-99

DOI: 10.20983/culcyt.2024.3.2.9

ISSN (electrónico) 2007-0411

e21309

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Procedimiento iterativo de integración por partes y la evaluación de su eficacia en el aula

Iterative integration-by-parts procedure and its efficacy assessment in the classroom

Jorge Eduardo Macías Díaz[1a], *Miguel Ángel Abreu Terán*[2], *Alejandro Román Loera*[1b]

[1]Universidad Autónoma de Aguascalientes, Centro de Ciencias Básicas, {[a]Departamento de Matemáticas y Física, [b]Departamento de Sistemas Electrónicos, Centro de Ciencias Básicas}, Aguascalientes, México

[2]Universidad de Oriente, Departamento de Matemática Aplicada, Santiago de Cuba, Cuba

RESUMEN

En este trabajo se evaluó una estrategia simple para aplicar iterativamente la regla de integración de Leibniz desde cálculo elemental a problemas operativos. La regla de integración de Leibniz (también conocida como "fórmula de integración por partes") es una fórmula relativamente simple. Sin embargo, algunos problemas típicos de cálculo de antiderivadas requieren aplicar esta fórmula de forma iterativa. Lamentablemente, este proceso provoca soluciones erróneas y que requieren mucho tiempo por las diversas aplicaciones de la regla de Leibniz y la complejidad de los cálculos. La estrategia propuesta en el presente trabajo reduce el tiempo empleado para obtener las soluciones de aquellos problemas iterativos. Además, el procedimiento empleado es simple, fácil de describir algorítmicamente y produce resultados más rápidos. Para mostrar la eficiencia de esta estrategia, se realizó un estudio experimental con un grupo de estudiantes de pregrado de ingeniería en una universidad pública de México. La capacidad de estos estudiantes para utilizar reglas elementales de integración se demostró mediante una prueba preliminar y el grupo se dividió en dos subgrupos, a uno de los cuales se le enseñó la regla tradicional de Leibniz, mientras que el segundo aprendió la estrategia estudiada en este trabajo. Los resultados mostraron que el enfoque actual produce resultados decisivamente más rápidos que el método tradicional.

PALABRAS CLAVE: estrategia de resolución de problemas; regla integral de Leibniz; integración recursiva por partes; método de solución; evaluación cuantitativa.

ABSTRACT

In this work, a simple strategy for iteratively applying Leibniz's integration rule from elementary calculus to operational problems was evaluated. Leibniz's integration rule (also known as the "integration by parts formula") is a relatively simple formula. However, some typical antiderivative calculus problems require applying this formula iteratively. Unfortunately, this process leads to erroneous and time-consuming solutions due to the various applications of Leibniz's rule and the complexity of the calculations. The strategy proposed in this work reduces the time spent obtaining the solutions of those iterative problems. Furthermore, the procedure used is simple, easy to describe algorithmically, and produces faster results. To show the efficiency of this strategy, an experimental study was conducted with a group of undergraduate engineering students at a public university in Mexico. The ability of these students to use elementary rules of integration was demonstrated by a pretest and the group was divided into two subgroups, one of which was taught the traditional Leibniz rule, while the second learned the strategy studied in this work. The results showed that the current approach produces decisively faster results than the traditional method.

KEYWORDS: problem-solving strategy; Leibniz's integral rule; recursive integration by parts; solution method; quantitative assessment.

Correspondencia:
DESTINATARIO: Alejandro Román Loera
INSTITUCIÓN: Universidad Autónoma de Aguascalientes / Centro de Ciencias Básicas
DIRECCIÓN: Ave. Universidad 940, Ciudad Universitaria, Aguascalientes, Ags. C. P. 20100, México
CORREO ELECTRÓNICO: alejandro.roman@edu.uaa.mx

Fecha de recepción: 23 de julio de 2024. Fecha de aceptación: 19 de noviembre de 2024. Fecha de publicación: 4 de diciembre de 2024.

acceso abierto UACJ

REVISTA ARBITRADA

I. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas en matemáticas es una de las vías de investigación más interesantes en educación [1]. Este tema ha sido investigado en diversos niveles educativos y en diferentes entornos culturales [2], [3]. Algunos estudios han sugerido que el nivel de comprensión lectora es crucial en el rendimiento en ciencias y matemáticas [4], y se han propuesto diferentes enfoques para mejorar la alfabetización de los estudiantes con ese fin. En particular, algunos informes interesantes han correlacionado positivamente el entendimiento de lectura y las habilidades de análisis y solución de situaciones matemáticas escritas en las primeras etapas de la infancia [5]. Otros estudios han establecido una correlación positiva entre el dominio de la lectura en inglés y el rendimiento académico de estudiantes de primer año de ciencias y matemáticas en entornos multilingües [6], mientras que otros trabajos han demostrado que el uso de textos descriptivos facilita el aprendizaje del conocimiento científico [7]. Sin embargo, el problema de buscar estrategias óptimas para mejorar las habilidades en el tratamiento de problemas matemáticos basadas en el desarrollo del entendimiento de la información escrita es una tarea abierta de discusión e investigación [8].

Vale la pena señalar que los problemas de matemáticas en todos los niveles educativos en México varían en su naturaleza y grado de dificultad. Por ejemplo, la formulación de problemas es quizás una de las tareas más importantes y críticas en matemáticas [9]. Se demostró que la manera en cómo los estudiantes abordan el planteamiento de problemas afecta al desarrollo de habilidades de resolución de problemas y a la conciencia metacognitiva, en todos los niveles de la educación formal [10]. Como han señalado recientemente algunos autores en el contexto de la educación matemática en el nivel secundario, las dificultades en la resolución de problemas pueden deberse a una falta de capacidad para traducir enunciados verbales al lenguaje matemático [11]. Estos autores han propuesto algunas conjeturas para minimizar este problema, pero aún falta una solución concreta y eficaz. Mientras tanto, otros investigadores han abogado por integrar las artes visuales para enriquecer la educación matemática en el nivel de escuela primaria [12]. Se ha hecho hincapié en el planteamiento de problemas en geometría, aunque las mejoras en la comprensión y explicación del pensamiento geométrico no muestran diferencias con los enfoques tradicionales.

Se han propuesto varias estrategias para aliviar las dificultades en la resolución de problemas matemáticos, por ejemplo. Por ejemplo, un diseño multimedia interactivo [13], un sistema de aprendizaje móvil basado en una estrategia colaborativa de planteamiento de problemas [14] y la propuesta de un enfoque interactivo de planteamiento de problemas con el objetivo de unir y facilitar el aprendizaje previo y en clase para las aulas invertidas [15]. Mientras tanto, otros estudios han asesorado sobre el desarrollo de materiales de aprendizaje para mejorar las habilidades de resolución de problemas matemáticos utilizando un modelo de aprendizaje basado en problemas [16] y el diseño y análisis de guiones colaborativos para mejorar la autorregulación y la alfabetización matemática [17].

Actualmente, hay muchos enfoques diferentes para resolver la resolución de problemas en matemáticas en todos los niveles educativos y los recursos propuestos para resolver las dificultades van desde la teoría hasta el uso de artefactos tecnológicos adecuados. Sin embargo, el problema sigue siendo un tema abierto de investigación activa [18] que puede estudiarse en el escenario general o en casos particulares.

El propósito de este trabajo es abordar una familia específica de problemas de cálculo elemental en los niveles de secundaria y pregrado de escuelas mexicanas , utilizando un enfoque metodológico novedoso. Concretamente, se estudió una estrategia sencilla para resolver problemas complejos utilizando la integración por partes [19]. La fórmula para la integración por partes es consecuencia de la regla de diferenciación de Leibniz (llamada “regla del producto” en el cálculo diferencial), que puede llevar a una cantidad sustancial de cálculos que consumen mucho tiempo y, por tanto, errores [20]. En este manuscrito, se examina y proporciona una generalización de un enfoque recientemente reportado en la literatura [21] para aplicar la integración por partes de manera iterativa. Utilizando un entorno experimental, se dilucida la eficiencia de dicho enfoque en comparación con la aplicación tradicional de la fórmula de integración. El experimento se llevó a cabo con la ayuda de dos grupos de estudiantes de primer año de ingeniería de una universidad pública del estado de Aguascalientes, aunque se pueden esperar resultados similares si se consideraran estudiantes de secundaria en el experimento. Los detalles de ese experimento se proporcionan en la sección de metodología.

PRELIMINARES

Los problemas de cálculo de límites, derivadas e integrales en matemáticas presentan una amplia gama de enfoques diferentes. Dejando de lado las complicaciones de plantear problemas en aquellos temas de cálculo elemental [22] y la formación matemática inherente de los estudiantes [23], los meros problemas de cálculo representan un interesante objeto de estudio que puede ser sistematizado [24]. De manera concreta, la aplicación de fórmulas estándar para límites, derivadas e integrales en el contexto de la enseñanza universitaria o secundaria es un área interesante de mejora constante en matemáticas y educación. Restringiendo nuestra atención al cálculo de integrales indefinidas, algunas fórmulas son relativamente sencillas de aplicar. Sin embargo, hay otros que conllevan más complicaciones. Tal es el caso de la fórmula de integración por partes, que es consecuencia de la regla del producto de Leibniz [25].

La fórmula de integración por partes no solo es importante en matemáticas elementales. De hecho, los teoremas clásicos del cálculo vectorial de Green, Gauss y Stokes son extensiones de esta fórmula [26]. Además, la integración por partes se ha extendido a diversas ramas de las matemáticas modernas. De manera específica, recientemente se ha demostrado una fórmula para la integración por partes para un modelo de cambio de régimen de Markov [27]; recientemente ha aparecido otra forma de esta fórmula en forma generalizada dentro de la teoría del cálculo fraccionario [28] y en el cálculo de medidas de difusión degeneradas sobre espacios de camino y grupos de difeomorfismo [29]. Además, ese teorema del análisis funcional que establece que todo operador positivo autoadjunto sobre un espacio de Hilbert tiene un operador de raíz cuadrada, es una extensión de la fórmula de integración por partes [30]. En otras palabras, la importancia del uso de esta fórmula va más allá de la capacidad de determinar integrales indefinidas en el cálculo de la escuela secundaria o la universidad. De hecho, puede ser una herramienta útil para comprender las matemáticas avanzadas.

En aras de la exhaustividad, vale la pena recordar la fórmula de integración por partes en este contexto. Esa fórmula resulta de una aplicación de la regla de Leibniz para la derivada de un producto. Formalmente, si [a,b] es un intervalo no vacío de los números reales y $f,g:[a,b]\to R$ son diferenciables, entonces fg es diferenciable en [a,b] y $[f(x)g'(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$, $x \in [a,b]$.

Aquí, el símbolo ′ representa el operador de diferenciación con respecto a x. Esta fórmula forma parte de los cursos estándar de cálculo a nivel secundario y universitario en los Estados Unidos de América y otros países [31], y da lugar a la fórmula de integración por partes que establece que si f y g son continuamente diferenciables en [a, b], entonces

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \quad (1)$$

En esta ecuación, las integrales son indefinidas. Como mnemónico, los cursos universitarios de cálculo utilizan la siguiente forma de fórmula de integración por partes [32]:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Es bien sabido que existen problemas típicos que emplean esta fórmula de forma iterativa. El proceso suele ser tedioso en esos casos, dando lugar a largos cálculos y dando lugar a muchos errores potenciales.

A lo largo de este estudio, se asumió que se conocen las fórmulas elementales de integración y que la aplicación de estas es una tarea relativamente estándar para el lector. En estas circunstancias, la fórmula de integración por partes se aplica normalmente cuando el integrando es el producto de un polinomio por una función trascendental, o el producto de dos funciones trascendentales. En este trabajo no se consideraron aplicaciones simples de la ecuación (1). En cambio, se estudió un enfoque sistemático para resolver problemas que requieren varias aplicaciones de la fórmula de integración por partes. Concretamente, se consideraron problemas en los que la antiderivada de $fg^{(n)}$ debe calcularse en [a, b], para algún número natural n, y $g^{(n)}$ es la derivada de enésimo orden de g.

Formalmente, se asumió que f y g tienen derivadas hasta el orden n, que son continuas en [a, b]. Una aplicación recursiva de la fórmula de integración por partes muestra fácilmente que

$$\begin{aligned}\int f(x)g^{(n)}(x)dx &= f(x)g^{(n-1)}(x) - f'(x)g^{(n-1)}(x) \\ &+ \dots + (-1)^{(n-1)}\int f^{(n)}(x)g(x)dx,\end{aligned} \quad (2)$$

para cada $x \in [a,b]$

Es importante notar que n es arbitrario. En un problema típico de la escuela secundaria o la universidad, al estudiante se le presenta una integral para calcular, sin tener ninguna pista sobre cómo obtener la integral indefinida. Ante este hecho, los libros de texto proponen la aplicación de la fórmula de integración por partes cuando el problema de integración adopta cualquiera de las siguientes formas [32]:

- **Tipo 1**: $\int P(x)T(x)dx$. Aquí, se asumió que $P(x)$ es un polinomio y $T(x)$ puede ser cualquiera de las funciones $e^{\alpha x}$, senαx o cosαx, donde α es una constante. En este caso, la estrategia consiste en hacer $f(x) = P(x)$ y $g^{n}(x) = T(x)$.

- **Tipo 2**: $\int R(x)T(x)dx$. En este caso, $R(x)$ es un polinomio o una función racional, y $T(x)$ contiene expresiones con las funciones ln, arcsen o arctan. En esta situación, la sugerencia es emplear $f(x) = T(x)$.

- **Tipo 3**. $\int T(x)U(x)dx$. Aquí, se asumió que tanto $T(x) = e^{\alpha x}$ como $U(x)$ son cualquiera de las funciones senβx o cosβx, donde α y β son constantes. En estas circunstancias, no se distingue qué función se elige $f(x)$.

La estrategia actual se diseñó porque la mayoría de los estudiantes universitarios sin matemáticas están más interesados en aprender a aplicar fórmulas que en comprender los conceptos subyacentes [33]. Siguiendo esa perspectiva, se propone el Algoritmo 1 para resolver problemas utilizando la fórmula de integración por partes. El algoritmo se basa en la siguiente estrategia:

El problema es calcular $\int h(s)ds$.

1. Determinar si la integral se puede calcular mediante fórmulas elementales. Si ese es el caso, se hace usando la fórmula correcta, sustituciones adecuadas y/o manipulaciones algebraicas.

2. Si la integral no se puede calcular usando fórmulas elementales, determinar si h se puede expresar como $h(x) = f(x)g^{(n)}(x)$ y si la integral tiene la forma de tipo 1, 2 o 3. Si ese es el caso, se siguen los siguientes pasos:
   a. Determinar f y $g^{(n)}$ dependiendo de si la integral es de tipo 1, 2 o 3.
   b. Calcular f, f', f'', ... por diferenciación elemental. Al mismo tiempo, calcular $g^{(n)}, g^{(n-1)}$, ... mediante integración elemental.
   c. Dejar de calcular $f^{(k)}$ y $g^{(n-k)}$ cuando se cumpla alguna de las siguientes condiciones: o $f^{(k)}g^{(n-k)}$ es integrable o $f^{(k)}g^{(n-k)}$ es un múltiplo escalar de $fg^{(n)}$.
   d. Tomar $n = k$.
   e. La solución del problema viene dada por la ecuación (2). De forma tabular se puede aplicar el siguiente diagrama, que representa los términos que se multiplican en (2) y el signo que afecta a cada uno de ellos:

f		f'		$\cdots$		$f^{(n)}$		
	$\searrow -$		$\searrow +$		$\searrow \pm$		$\searrow \mp$	
$g^{(n)}$		$g^{(n-1)}$				g		g

   f. Si la última integral del lado derecho de la ecuación (2) es computable, entonces debe ser calculada. Si $f^{(k)}g^{(n-k)}$ es un múltiplo escalar de $fg^{(n)}$, entonces se resuelve para $\int fg^{(n)}$.

3. Si la integral no es del tipo 1, 2 o 3, o si el procedimiento descrito en el paso 2 (a)–(f) no funciona, hay que utilizar otro método.

A continuación, se muestran tres ejemplos sobre la aplicación de nuestra estrategia. Esos ejemplos son importantes en nuestro estudio, en vista de que se utilizarán para probar la eficiencia de nuestro enfoque en un entorno experimental.

Ejemplo 1 (tipo 1). Calcular la integral indefinida $\int x^2 \cos 2x dx$.

El problema corresponde al primer tipo considerado anteriormente. Entonces, debe elegirse $f(x) = x^2$ y $g^{(n)}(x) = \cos 2x$. Usando la estrategia descrita en este trabajo, se obtiene la Tabla 1(a). Obviamente, $n = 2$ en este caso. En consecuencia, la solución al problema es

$$\int x^2 \cos 2x dx = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{2}x \cos 2x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

Ejemplo 2 (tipo 2). Calcular la integral indefinida $\int x \ln x dx$.

Este problema corresponde al segundo tipo descrito anteriormente. Como se sugirió, quedó $f(x) = \ln x$ y $g^{(n)}(x) = x$. La Tabla 1(b) proporciona los detalles sobre la aplicación de la estrategia propuesta en el trabajo. La solución a este problema es

$$\int x \ln x dx = \tfrac{1}{2}x^2 \ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + C$$

Ejemplo 3 (tipo 3). Calcular la integral indefinida $\int e^x \cos x dx$

Los detalles de la aplicación de los algoritmos utilizados en este trabajo se proporcionan en la Tabla 1 (c). En este caso se llegó fácilmente a la fórmula siguiente:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx$$

Reordenando términos y resolviendo esta integral indefinida, se obtuvo

$$\int e^x \cos x dx = \tfrac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x) + C$$

TABLA 1
DETALLES DE LOS CÁLCULOS PARA RESOLVER, USANDO EL ALGORITMO PROPUESTO

(a) EJEMPLO 1

	$k = 0$		$k = 1$		$k = 2$	$\rightarrow$	$n = 2$
$f^{(n)}(x)$	x^2		$2x$		2		
		$\overset{+}{\searrow}$		$\overset{-}{\searrow}$		$\overset{+}{\searrow}$	
$f^{(n-k)}(x)$	$\cos 2x$		$\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$		$-\frac{1}{4}\cos 2x$		$\frac{1}{4}\cos 2x$

(b) EJEMPLO 2

	$k = 0$		$k = 1$	$\rightarrow$	$n = 1$
$f^{(k)}(x)$	$\ln x$		$\frac{1}{x}$		
		$\overset{+}{\searrow}$		$\overset{-}{\searrow}$	
$g^{(n-k)}(x)$	x		$\frac{1}{2}x$		$\frac{1}{2}x$

(c) EJEMPLO 3

	$k = 0$		$k = 1$		$K = 2$	$\rightarrow$	$n = 2$
$f^{(k)}(x)$	$\cos x$		$-\operatorname{sen} x$		$-\cos x$		
		$\overset{+}{\searrow}$		$\overset{-}{\searrow}$		$\overset{+}{\searrow}$	
$g^{(n-k)}(x)$	e^x		e^x		e^x		e^x

II. METODOLOGÍA

Para evaluar la eficacia de la estrategia, se llevó a cabo una prueba experimental en un aula. El experimento se realizó en una universidad pública durante el receso de verano de 2020. Se consideró un grupo de 52 estudiantes de primer año de la carrera de Cálculo Integral para ingeniería informática. Los estudiantes ya habían cubierto fórmulas de integración simples (véase el Apéndice A) y se evaluaron sobre el uso de estas fórmulas antes del inicio del experimento. Los 20 mejores estudiantes de esa evaluación fueron seleccionados para ser parte del experimento y aceptaron de buen grado ser parte de este. Durante una semana, estos estudiantes reforzaron sus capacidades en el cálculo de integrales indefinidas usando solo las reglas de integración y las integrales 1-11 del Apéndice A. Para ello, los estudiantes debían asistir a una hora más de clase durante la semana (además del horario oficial del curso). Se aplicó otra prueba al final de esa semana. Los resultados (no presentados aquí por falta de relevancia) mostraron que los estudiantes fueron muy eficientes y efectivos en la resolución de problemas que requerían el uso de esas fórmulas. En ese sentido, el grupo de 20 estudiantes era aproximadamente homogéneo en sus habilidades básicas de integración.

La semana siguiente, el grupo de 20 estudiantes se dividió aleatoriamente en dos grupos de 10 estudiantes cada uno. Al primer grupo (llamado Grupo I) se le enseñó a resolver problemas utilizando la fórmula estándar de integración por partes (1). Durante tres días dedicaron una hora a resolver problemas con esa fórmula y los problemas fueron elegidos de [32]. Cabe señalar que los estudiantes conocieron los tres problemas mencionados en el apartado anterior, y siempre se les recordó que los problemas se pueden resolver con la fórmula de integración por partes. El segundo grupo (llamado Grupo II) fue capacitado en el uso de la ecuación (2) y, de manera precisa, en el uso del Algoritmo 1 (véase el Apéndice B). Los estudiantes también se reunieron con el instructor durante tres días y resolvieron el mismo conjunto de problemas que Grupo I. De hecho, el instructor fue el mismo para ambos grupos. Se aseguró de enseñar el uso de la fórmula (1) al Grupo I, y el Algoritmo 1 y la fórmula (2) al Grupo II.

Luego de esos tres días de instrucción, se aplicó una prueba escrita a ambos grupos. Las siguientes fueron instrucciones comunes para ambos grupos, y fueron anunciadas públicamente el día previo a la prueba:

- Las pruebas fueron anónimas. Sin embargo, se animó a los estudiantes a hacer lo mejor que pudieran y trabajar lo más rápido posible.
- El tiempo límite para responder el test fue de 1 hora.
- Se recordó a los alumnos que los resultados no iban a afectar a su nota en el curso oficial. La participación en el experimento, por el contrario, se recompensaría con puntos extra en el curso oficial.

- La prueba constaba de tres problemas. En cada problema, se pidió a los estudiantes calcular las integrales de los Ejemplos 1 a 3, respectivamente. Se pidió a los estudiantes que mostraran su trabajo.

- Las respuestas de esos problemas se entregaron a los estudiantes al inicio de la prueba. Se les pidió que verificaran sus soluciones y, si había un error, se les pidió que corrigieran los errores y finalmente obtuvieran las respuestas correctas.

- Al comienzo de la prueba se entregó a cada estudiante una hoja de fórmulas con las fórmulas y propiedades del Apéndice A. No se permitió material adicional.

- Quedó prohibido usar calculadoras y dispositivos electrónicos. Sin embargo, a los participantes se les permitió usar un cronómetro digital para registrar el tiempo necesario para resolver cada problema de la prueba.

- A los instructores que supervisaban la prueba no se les permitió interactuar con los estudiantes.

- A los estudiantes se les permitió usar el baño antes del comienzo de la prueba, pero no se les permitió levantarse de sus asientos hasta que entregaron sus exámenes.

Por otro lado, las instrucciones específicas del grupo fueron las siguientes:

- Grupo I Los estudiantes sólo pudieron utilizar la fórmula (1) para resolver problemas.

- Grupo II Los estudiantes sólo pudieron utilizar la fórmula (2) y, por tanto, el Algoritmo 1.

Cada uno de los grupos realizó la prueba al mismo tiempo. De esta forma se evitó la filtración de información y se favoreció la igualdad de condiciones previa a la prueba. Se impuso el silencio dentro y fuera de los lugares de prueba. También se respetó una sana distancia de 1.5 metros entre estudiantes. De esta manera se garantizó que no hubo trampas durante el examen y se cumplió con las medidas universitarias para evitar la propagación de cualquier posible enfermedad infecciosa. También se requerían mascarillas y había gel desinfectante a base de alcohol en la entrada de las aulas.

Los exámenes de los individuos del Grupo I fueron etiquetados como I-n, fueron n = 1, 2, ... , 10. De manera similar, las pruebas para el Grupo II fueron etiquetadas como II-n, donde n = 1, 2, ... , 10. Para cada individuo y cada problema de prueba, cada uno de los participantes registró el tiempo necesario para completarlo en el lado del enunciado del problema. Al final de las pruebas, los profesores dedicaron tiempo a calificar los trabajos y analizar los resultados desde el punto de vista matemático y estadístico.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Después de la evaluación de las pruebas, se confirmó que cada grupo empleó las fórmulas que se les pidió que usaran. Esto significa en particular que los individuos del Grupo I utilizaron la ecuación (1), mientras que los sujetos del Grupo II emplearon el enfoque estudiado en este trabajo.

Se encontró también que 19 de los 20 estudiantes tenían todas las respuestas correctas. Desafortunadamente, uno de los estudiantes del Grupo I no pudo resolver correctamente dos de los tres problemas del examen. Como consecuencia, los resultados de su prueba fueron eliminados de la lista de resultados y del análisis estadístico consecutivo. En particular, las pruebas correspondientes al Grupo I fueron reetiquetadas como I-n, donde n = 1, 2, ..., 9, mientras que las pruebas del Grupo II mantuvieron el mismo etiquetado: II-n, donde n = 1, 2, ..., 10.

Los resultados se presentan en la Tabla 2, la cual consta de dos partes: una para el Grupo I y otra para el Grupo II. En ambos se consideró a cada individuo del grupo y se proporcionó el tiempo total usado para resolver cada problema de la prueba, junto con el tiempo total empleado por persona para completar la prueba.

Es pertinente señalar que los datos están dados en minutos y que los fueron redondeado al primer decimal. En una primera inspección de los resultados se desprende que los individuos del Grupo II emplearon menos tiempo para responder cada preguntas de examen. Para establecer este hecho de forma rigurosa, se realizaron pruebas de hipótesis sobre el tiempo medio necesario para resolver cada problema por grupo. En vista de que el tamaño de la población es relativamente pequeño (menos de 20 individuos por grupo), se hicieron pruebas de hipótesis basadas en la distribución t de Student con varianzas desconocidas y desiguales.

TABLA 2
TABLA DE RESULTADOS DE LOS GRUPOS I Y II

Individuo	Tiempo (min)			
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Total
Grupo I				
I-1	21.9	6.5	14.5	42.9
I-2	15.3	11.8	8.9	36.0
I-3	13.1	9.1	11.7	33.9
I-4	15.3	6.6	10.3	32.2
I-5	12.7	11.6	13.5	37.8
I-6	12.9	4.4	8.2	25.5
I-7	17.5	8.1	10.9	36.5
I-8	17.2	7.8	12.1	37.1
I-9	17.3	9.1	13.4	39.8
Grupo II				
II-1	8.9	5.5	7.4	21.8
II-2	10.6	3.4	5.1	19.1
II-3	5.4	5.6	6.7	17.7
II-4	9.4	6.6	6.5	22.5
II-5	8.7	5.3	8.0	22.0
II-6	6.6	6.0	9.1	21.7
II-7	7.7	4.4	9.0	21.1
II-8	8.7	5.1	5.1	18.9
II-9	12.8	3.8	6.9	23.5
II-10	11.8	5.8	6.8	24.4

Los resultados se dan a continuación para cada uno de los cuatro escenarios posibles. En cada caso, μ1 y μ2 representan el tiempo medio empleado por los Grupos I y Grupo II, respectivamente, y se consideró el conjunto de hipótesis:

- H0: μ1 = μ2.
- Ha : μ1 > μ2.

Los valores p resultantes para cada caso se proporcionan a continuación:

- Problema 1. Valor p= 2.4327×10^{-5}.
- Problema 2. Valor p= 1.8952×10^{-3}.
- Problema 3. Valor p= 6.1952×10^{-5}.
- Total. Valor p = 3.4826×10^{-6}.

De ello se deduce que el nivel de significancia en todos los casos es aproximadamente igual al 100%. Se concluye que existe suficiente evidencia estadística de que el enfoque estudiado en este trabajo produce resultados más rápidos en comparación con la aplicación tradicional de la fórmula de integración por partes.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo, se estudió la eficiencia de una nueva estrategia para resolver problemas de cálculo que involucran la regla de integración de Leibniz (también conocida como "fórmula de integración por partes". Se sabe que usar esta fórmula de integración requiere más concentración, cálculos y fórmulas elementales adicionales del cálculo integral. La experiencia también dice que aplicar esta regla conduce a errores por la complejidad de los problemas y los cálculos algebraicos necesarios. Además, algunos problemas típicos del uso de esta fórmula requieren aplicarla iterativamente varias veces, en esos casos el tiempo requerido para resolver el problema aumenta drásticamente, así como la posibilidad de incurrir en errores, siendo una fórmula importante en los tradicionales cursos de introducción al cálculo en la escuela secundaria y A nivel universitario en los Estados Unidos de América y otros países, dominar su uso es una tarea de suma importancia.

El enfoque descrito en este trabajo pretende aliviar la problemática sobre el uso iterado de la fórmula de integración por partes. La estrategia propuesta se basa formalmente en una generalización de la regla de integración de Leibniz, que puede demostrarse fácilmente en el nivel secundario y universitario. Sin embargo, no se hace énfasis en probar esta fórmula. En cambio, la fórmula se proporciona a los estudiantes con la intención de emplearla algorítmicamente. De hecho, el presente trabajo proporciona descripciones de la estrategia en palabras, utilizando un algoritmo y mediante una mnemónica tabular que los estudiantes pueden memorizar fácilmente. Se proporcionaron algunos ejemplos para ilustrar la aplicación de la estrategia y en cada caso se presentaron algunas tablas como material de apoyo. Vale la pena señalar que el algoritmo funciona tanto para problemas simples como complicados donde se necesita integración por partes.

Para evaluar la eficiencia de la estrategia, se realizó un estudio experimental entre estudiantes de primer año de la carrera de ingeniería de una universidad pública. En nuestro estudio, se consideró un grupo de 20 estudiantes y se aseguró que dominaran el uso de fórmulas de integración elemental. El grupo era homogéneo en ese sentido y se dividió en dos grupos de 10 personas cada uno. Ambos grupos fueron capacitados para resolver problemas que requerían la fórmula de integración por partes. Sin embargo, al primero de los grupos se le enseñó la fórmula tradicional de integración por partes, mientras que al segundo se le instruyó en el uso del enfoque actual. Durante 3 días, ambos grupos se entrenaron exhaustivamente en clase. Ambos grupos resolvieron el mismo conjunto de problemas de cálculo utilizando sus respectivos enfoques. Al final de esa capacitación, a ambos grupos se les aplicó el mismo examen para determinar si existían diferencias en sus aprendizajes.

Las pruebas fueron las mismas para los dos grupos y se llevaron a cabo en circunstancias similares. Además, se proporcionaron las respuestas a los estudiantes para que llegaran a las respuestas correctas. Se registró el tiempo para resolver cada una de las tres preguntas de las pruebas para cada problema y para cada estudiante. Una evaluación exhaustiva de las pruebas mostró que 19 de los estudiantes alcanzaron todas las respuestas correctas. Por otro lado, se realizó de forma detallada un análisis estadístico de los tiempos registrados para resolver cada pregunta. Los resultados de nuestro análisis proporcionan una fuerte evidencia estadística de que la estrategia propuesta da como resultado tiempos más rápidos para calcular integrales utilizando la fórmula de integración por partes.

Estos resultados se obtuvieron después de aplicar una prueba de hipótesis sobre las medias de los dos grupos. Este estudio se realizó para cada problema de la prueba y el tiempo total por grupo. En cualquier caso, los resultados estadísticos arrojaron resultados concluyentes. Este resultado es interesante porque a ambos grupos se les dio el mismo tiempo para aprender cada estrategia para resolver problemas usando la regla de integración de Leibniz. Como conclusión, el enfoque actual puede implementarse en carreras de ingeniería de primer año, para que los estudiantes obtengan resultados más rápidos en el cálculo de integrales mediante la fórmula de integración por partes.

REFERENCIAS

[1] A. J. Boonen, B. B. de Koning, J. Jolles y M. van der Schoot, "Word problem solving in contemporary math education: A plea for reading comprehension skills training", *Front. Psychol.*, vol. 7, art. 191, 2016, doi: 10.3389/fpsyg.2016.00191.

[2] H. Altun, "Examining the problem solving skills of primary education mathematics teacher candidates according to their learning styles", *Int. Educ. Stud.*, vol. 12, n.º 4, pp. 60-73, 2019, doi: 10.5539/ies.v12n4p60.

[3] E. Kikas, K. Mädamürk y A. Palu, "What role do comprehension-oriented learning strategies have in solving math calculation and word problems at the end of middle school?" *Br J Educ Psychol*, vol. 90, supl., pp. 105-123, 2020, doi: 10.1111/bjep.12308.

[4] S. Akbasli, M. Sahin y Z. Yaykiran, "The effect of reading comprehension on the performance in science and mathematics", *Journal of Education and Practice*, vol. 7, n.º 16, pp. 108-121, 2016.

[5] J. M. Goodrich y J. M. Namkung, "Correlates of reading comprehension and word-problem solving skills of Spanish-speaking dual language learners", *Early Child. Res. Q.*, vol. 48, pp. 256-266, 2019, doi: 10.1016/j.ecresq.2019.04.006.

[6] L. Stoffelsma y W. Spooren, "The relationship between English reading proficiency and academic achievement of first-year science and mathematics students in a multilingual context", *Int J of Sci and Math Educ*, vol. 17, pp. 905-922, 2019, doi: 10.1007/s10763-018-9905-z.

[7] Y.-C. Jian, "Reading instructions facilitate signaling effect on science text for young readers: an eye-movement study", *Int J of Sci and Math Educ*, vol. 17, pp. 503-522, 2019, doi: 10.1007/s10763-018-9878-y.

[8] S. Kim, M. Pollanen, M. G. Reynolds y W. S. Burr, "Problem solving as a path to comprehension", *Math. Comput. Sci.*, vol. 14, pp. 1-15, 2020, doi: 10.1007/s11786-020-00457-1.

[9] J. Cai y C. Jiang, "An analysis of problem-posing tasks in Chinese and us elementary mathematics textbooks", *Int J of Sci and Math Educ*, vol. 15, n.º 8, pp. 1521-1540, 2017, doi: 10.1007/s10763-016-9758-2.

[10] N. Akben, "Effects of the problem-posing approach on students' problem solving skills and metacognitive awareness in science education", *Res Sci Educ*, vol. 50, n.º 3, pp. 1143-1165, 2020, doi: 10.1007/s11165-018-9726-7.

[11] M. Molina, S. Rodríguez-Domingo, M. C. Cañadas y E. Castro, "Secondary school students' errors in the trans-

lation of algebraic statements", *Int. J. Sci. Math. Educ.*, vol. 15, n.º 6, pp. 1137-1156, 2017, doi: 10.1007/s10763-016-9739-5.

[12] E. M. Schoevers, P. P. Leseman y E. H. Kroesbergen, "Enriching mathematics education with visual arts: Effects on elementary school students' ability in geometry and visual arts", *Int. J. Sci. Math. Educ.*, vol. 18, pp. 1613-1634, 2019, doi: 10.1007/s10763-019-10018-z.

[13] M. F. Amir, F. N. Hasanah y H. Musthofa, "Interactive multimedia based mathematics problem solving to develop students' reasoning", *Int. J. Eng. Technol.*, vol. 7, n.º 2.14, pp. 272-276, 2018, doi: 10.14419/ijet.v7i2.12.14691.

[14] H.-Y. Sung, G.-J. Hwang y Y.-C. Chang, "Development of a mobile learning system based on a collaborative problem-posing strategy", *Interact. Learn. Environ.*, vol. 24, n.º 3, pp. 456-471, 2016, doi: 10.1080/10494820.2013.867889.

[15] X.-D. Ye, Y.-H. Chang y C.-L. Lai, "An interactive problem-posing guiding approach to bridging and facilitating pre-and in-class learning for flipped classrooms", *Interact. Learn. Environ.*, vol. 27, n.º 8, pp. 1075-1092, 2019, doi: 10.1080/10494820.2018.1495651.

[16] M. V. Siagan, S. Saragih y B. Sinaga, "Development of learning materials oriented on problem-based learning model to improve students' mathematical problem solving ability and metacognition ability", *Int Elect J Math Ed*, vol. 14, n.º 2, pp. 331-340, 2019, doi: 10.29333/iejme/5717.

[17] C.-H. Chen y C.-H. Chiu, "Collaboration scripts for enhancing metacognitive self-regulation and mathematics literacy", *Int J of Sci and Math Educ*, vol. 14, n.º 2, pp. 263-280, 2016, doi: 10.1007/s10763-015-9681-y.

[18] B. Rott, "Teachers' behaviors, epistemological beliefs, and their interplay in lessons on the topic of problem solving", *Int. J. Sci. Math. Educ.*, vol. 18, n.º 5, pp. 903-924, 2020, doi: 10.1007/s10763-019-09993-0.

[19] P. W. Hempson, "Repeated integration by parts", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, vol. 14, n.º 4, pp. 437-439, 1983, doi: 10.1080/0020739830140407.

[20] M. J. Barany, "Integration by parts: Wordplay, abuses of language, and modern mathematical theory on the move", *Hist. Stud. Nat. Sci.*, vol. 48, n.º 3, pp. 259-299, 2018, doi: 10.1525/hsns.2018.48.3.259.

[21] C. C. Tisdell, "Tic-tac-toe and repeated integration by parts: alternative pedagogical perspectives to Lima's integral challenge", *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, vol. 51, n.º 3, pp. 424-430, 2020, doi: 10.1080/0020739X.2019.1620969.

[22] M. Özgeldi y U. Aydın, "Identifying competency demands in calculus textbook examples: the case of integrals", *Int. J. Sci. Math. Educ.*, vol. 19, pp. 171-191, 2020, doi: 10.1007/s10763-019-10046-9.

[23] A. Ayebo y A. Mrutu, "An exploration of calculus students' beliefs about mathematics", *Int Elect J Math Ed*, vol. 14, n.º 2, pp. 385-392, 2019, doi: 10.29333/iejme/5728.

[24] P. Liljedahl, M. Santos-Trigo, U. Malaspina y R. Bruder, "Problem-solving in mathematics education", en *Problem-solving in mathematics education* (Serie ICME-13 Tropical Surveys). Springer, Cham., pp. 686-693, 2020, doi: 10.1007/978-3-319-40730-2_1.

[25] V. Borji y V. Font, "Exploring students' understanding of integration by parts: A combined use of APOS and OSA", *EURASIA J Math Sci Tech Ed*, vol. 15, n.º 7, art. em1721, 2019, doi: 10.29333/ejmste/106166.

[26] J. E. Marsden y A. Tromba, *Vector Calculus*. Nueva York: MacMillan, 2003.

[27] Y. Liu y N. Privault, "An integration by parts formula in a Markovian regime switching model and application to sensitivity analysis", *Stoch Anal Appl*, vol. 35, n.º 5, pp. 919-940, 2017, doi: 10.1080/07362994.2017.1339613.

[28] T. Abdeljawad, A. Atangana, J. Gómez-Aguilar y F. Jarad, "On a more general fractional integration by parts formulae and applications", *Phys. A: Stat. Mech. Appl.*, vol. 536, art. 122494, 2019, doi: 10.1016/j.physa.2019.122494.

[29] K. Elworthy, Y. Le Jan y X.-M. Li, "Integration by parts formulae for degenerate diffusion measures on path spaces and diffeomorphism groups", *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, vol. 323, n.º 8, pp. 921-926, 1996, doi: 10.48550/arXiv.1911.09739.

[30] A. Friedman, *Foundations of modern analysis*, 1.ª ed. Nueva York: Courier Corporation, 1982.

[31] P. Merrotsy, "A brief but important note on the product rule", *Aust Sr Math J*, vol. 30, n.º 2, pp. 57-63, 2016.

[32] J. Stewart, *Calculus: Concepts and Contexts*. Nueva York: Cengage Learning, 2009.

[33] M. Mann y M. C. Enderson, "Give me a formula not the concept! student preference to mathematical problem solving", *J. Adv. Mark. Educ.*, n.º 25 (núm. especial), pp. 15-24, 2017.

FINANCIAMIENTO

El autor Jorge Eduardo Macías Díaz agradece el apoyo financiero del Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías de México (CONAHCYT), a través de la subvención A1-S-45928.

CONFLICTO DE INTERESES

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses.

CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

Los autores contribuyeron igualmente a este trabajo.

DISPONIBILIDAD DE DATOS Y CÓDIGO

Datos y código disponibles previa solicitud al autor de correspondencia.

APÉNDICE A

En la aplicación del experimento realizado en este trabajo, se proporcionó a los estudiantes una hoja que contenía las reglas de integración y una tabla de integrales. Las siguientes fueron fórmulas comunes para los Grupos I y II.

1) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, donde c es una constante

2) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3) $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{1}{(n+1)}[f(x)]^{n+1} + C$

4) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

5) $\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$

6) $\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$

7) $\int \operatorname{sen}(f(x)) f'(x)dx = -\cos(f(x)) + C$

8) $\int \cos(f(x)) f'(x)dx = \operatorname{sen}(f(x)) + C$

9) $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \arctan(f(x)) + C$

10) $\int \sec^2(f(x)) f'(x)dx = \tan(f(x)) + C$

11) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}dx = \operatorname{arcsen}(f(x)) + C$

Además, se proporcionaron las siguientes fórmulas para cada uno de los dos grupos:

Grupo I

$\int (x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Grupo II

$\int f(x)g^{(n)}(x)dx = f(x)g^{(n-1)}(x) - f'(x)g^{(n-)}(x) + (-1)^{(n-1)}\int f^{(n)}(x)g(x)dx$

APÉNDICE B

Algoritmo 1. Algoritmo de la estrategia estudiada en este trabajo para resolver $\int f(x)g^{(n)}(x)dx$.

if la integral es elemental **then**
    usar fórmulas elementales
else
    if la integral es del tipo 1, 2 o 3 **then**
        Seleccione f y $g(n)$
        $k \leftarrow 0$
        repeat
            $k \leftarrow k + 1$
            Calcular $f^{(k)}$ diferenciando
            Calcular $g^{(n-k)}$ integrando
        until ($f^{(k)}g^{(n-k)}$ integrable) **or** ($f^{(k)}g^{(n-k)}$) es un múltiplo escalar de $f^{g(n)}$
        $n \leftarrow k$
        $\int fg^{(n)} \leftarrow fg^{(n-1)} - f'g^{(n-2)} + (-1)^{(n-1)}\int f^{(n)}g$
        if la última integral del lado derecho es calculable **then**
            Calcular la última integral
        else
            Resuelva para $\int fg^{(n)}$
        end if
    else
        Pruebe otro enfoque
    end if
end if