

Identificación algebraica de los parámetros físicos de un sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad

Algebraic identification of the physical parameters of a simplified two-degrees-of-freedom rotor-bearing system

Eduardo Barredo Hernández¹ , José Gabriel Mendoza Larios¹ ✉ , Luis Alberto Baltazar Tadeo² ,
Saulo Jesús Landa Damas³ 

¹Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM), México

²UPIIP/Instituto Politécnico Nacional, México

³Tecnológico Nacional de México – CENIDET, México

RESUMEN

En este trabajo se propone el desarrollo de identificadores de los parámetros de masa, rigidez y amortiguamiento de un sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad. La técnica utilizada para el desarrollo de los identificadores se conoce en la literatura como: técnica de identificación algebraica. Para el desarrollo de los identificadores paramétricos, se utilizó el modelo matemático de un sistema rotor-cojinete que considera los efectos de inercia traslacional y rotacional, así como, los efectos giroscópicos. Los identificadores algebraicos desarrollados determinan los valores de los parámetros físicos del sistema, para dos condiciones diferentes de velocidad de operación del rotor: velocidad constante y velocidad variable. La evaluación numérica de los identificadores muestra que, es posible determinar los valores de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete en un pequeño intervalo de tiempo que va de los 0.1 a 0.28 segundos.

PALABRAS CLAVE: sistema rotor-cojinete; identificación algebraica; parámetros físicos; vibración.

ABSTRACT

In this work we propose the development of identifiers for the mass, stiffness and damping parameters of a simplified rotor-bearing system with two degrees of freedom. The technique used for the development of the identifiers is known in the literature as: algebraic identification technique. For the development of the parametric identifiers, the mathematical model of a rotor-bearing system that considers translational and rotational inertia effects, as well as gyroscopic effects, was used. The developed algebraic identifiers determine the values of the physical parameters of the system for two different rotor operating speed conditions: constant speed and variable speed. Numerical evaluation of the identifiers shows that it is possible to determine the values of the mass, damping and stiffness parameters of the rotor-bearing system in a small-time interval ranging from 0.1 to 0.28 seconds.

KEYWORDS: rotor-bearing system; algebraic identification; physical parameters; vibration.

Correspondencia:

DESTINATARIO: José Gabriel Mendoza Larios.

INSTITUCIÓN: Universidad Tecnológica de la Mixteca (UTM).

DIRECCIÓN: Carretera a Acatlima km. 2.5, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

CORREO ELECTRÓNICO: jgml@mixteco.utm.mx

Fecha de recepción: 9 de septiembre de 2023. **Fecha de aceptación:** 7 de febrero de 2024. **Fecha de publicación:** 19 de febrero de 2024.



I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas físicos se pueden representar por medio de modelos matemáticos que sirven para capturar ciertas características esenciales del sistema que se quiere estudiar. La ecuación general de movimiento de un sistema rotor-cojinete se utiliza para conocer y predecir el comportamiento dinámico del sistema bajo la acción de diferentes condiciones de operación. Sin embargo, resulta imposible desarrollar un modelo matemático que describa exactamente el comportamiento dinámico de un sistema real. En consecuencia, el modelo es hasta cierto punto una aproximación del sistema real y su exactitud dependerá de la cercanía entre la respuesta medida del sistema y la respuesta calculada.

De acuerdo con Moreno y Thomson ^[1], estas diferencias entre las respuestas se conocen como incertidumbres y se deben principalmente a la existencia de variaciones asociadas a parámetros geométricos, propiedades mecánicas de los materiales, dinámicas no modeladas y la presencia de ruido en la señal experimental y, por lo tanto, estos fenómenos afectan directamente la respuesta dinámica del sistema.

Por otro lado, si el modelo matemático del sistema se construye a partir de un número finito de variables y parámetros, este se denomina *modelo paramétrico* ^[2]. En consecuencia, identificar correctamente los parámetros del sistema contribuirá a la construcción de un modelo matemático más preciso. En la literatura existe una amplia gama de métodos de estimación e identificación de parámetros ^{[3]-[6]}, sin embargo, por la naturaleza de estos métodos se dificulta su aplicación en sistemas más realistas.

Actualmente, en la literatura ha ganado popularidad una técnica de identificación diferente a los métodos clásicos. Esta técnica se denomina *técnica de identificación algebraica* ^[7], que sirve para el desarrollo de identificadores que determinan los valores de parámetros desconocidos del sistema a partir de su modelo matemático. Asimismo, la identificación algebraica se puede implementar a partir de dos criterios que son equivalentes: el criterio en el dominio del tiempo que funciona tanto para sistemas lineales y no lineales, y el criterio en el dominio de la frecuencia mediante el cálculo operacional que es aplicable solo a sistemas lineales. Por otro lado, esta técnica posee algunas características que la hacen atractiva para la comunidad científica,

entre las cuales destacan la velocidad de identificación, el desarrollo de identificadores independientes de las condiciones iniciales del sistema, la identificación de parámetros en línea y, además, presenta buenas propiedades de robustez ante dinámicas no modeladas, incertidumbre paramétrica y ruido de media cero. La técnica de identificación algebraica ya se ha utilizado para identificar parámetros de desbalance en sistemas rotor-cojinete ^{[8]-[12]}, coeficientes rotodinámicos ^{[13], [14]} y parámetros en diversos sistemas mecánicos, eléctricos y señales ^{[15]-[20]}.

Por lo tanto, con la finalidad de lograr un modelo matemático hasta cierto punto simplificado, que logre capturar de una manera más precisa el comportamiento dinámico de una máquina rotatoria real, en este trabajo de investigación se propone el uso de la técnica de identificación algebraica para la identificación de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez de un modelo de rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad.

II. METODOLOGÍA

La realización de este trabajo de investigación se llevó a cabo al dar seguimiento a cada punto de la metodología que se presenta a continuación:

1. Revisión del estado del arte.
2. Definición del problema y obtención del modelo matemático del sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad.
3. Implementación de la técnica de identificación algebraica en el dominio del tiempo, para el desarrollo de los modelos matemáticos de identificación de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad. Cabe señalar que los modelos de identificación se realizaron al considerar dos condiciones de operación del sistema rotor-cojinete: velocidad constante y velocidad variable.
4. Programación y puesta a prueba en simulación de los modelos de identificación paramétrica.
5. Análisis, discusión de los resultados obtenidos y conclusiones.

En la siguiente sección de este artículo se presenta el modelo matemático del sistema rotor-cojinete simplificado utilizado en este trabajo de investigación.

MODELADO MATEMÁTICO DEL SISTEMA ROTOR-COJINETE

En la [Figura 1](#) se muestra un esquema del modelo de rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad que se utilizó para el desarrollo de esta investigación. El sistema rotor-cojinete se compone de un eje sólido flexible, de sección transversal simétrica y uniforme de longitud L , un disco inercial ubicado a una distancia l_1 del extremo izquierdo, un par de cojinetes en sus extremos que proporcionan amortiguamiento y rigidez al sistema y un parámetro de desbalance $m_u d$.

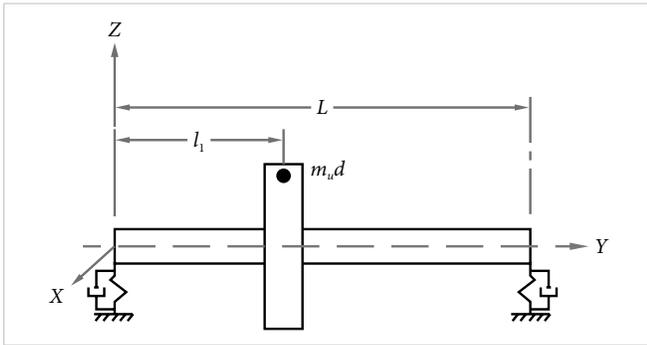


Figura 1. Modelo de rotor-cojinete simplificado.

El modelo matemático del sistema rotor-cojinete de dos grados de libertad ([Figura 1](#)) se obtiene fácilmente siguiendo la metodología presentada por Lalanne y Ferraris ^[21]. Asimismo, este modelo considera los efectos de la inercia traslacional y rotacional, además de los efectos giroscópicos, y se expresa en forma matricial como sigue:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\delta}\} + [\mathbf{C}(\dot{\phi})]\{\dot{\delta}\} + [\mathbf{K}(\ddot{\phi})]\{\delta\} = \{\mathbf{F}\} \quad (1)$$

con

$$\{\mathbf{M}\} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{C}(\dot{\phi})] = [\mathbf{C}_1 + \dot{\phi}\mathbf{C}_2] = \begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_z \end{bmatrix} + \dot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}(\ddot{\phi})] = [\mathbf{K}_1 + \ddot{\phi}\mathbf{K}_2] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} + \ddot{\phi} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y$$

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_u d [\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)] \\ m_u d [\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)] \end{bmatrix}$$

donde los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete están representados por m , c y k , respectivamente. El vector de vibración que contiene los desplazamientos que corresponden a las direcciones x y z se define como $\{\delta\}$, los efectos

giroscópicos del sistema están especificados por el término $\dot{\phi}a$ y, adicionalmente, el término $-\dot{\phi}a$ representa el efecto de la aceleración angular del rotor en la rigidez del sistema. Por otro lado, el vector de fuerza $\{\mathbf{F}\}$ se genera por efecto del parámetro de desbalance $m_u d$, el cual está constituido por una masa de desbalance m_u , ubicada a una distancia radial d con una posición angular α sobre el disco inercial y constituye la excitación del sistema. Finalmente, los términos de desplazamiento, velocidad y aceleración del rotor en función del tiempo están asociados a las variables ϕ , $\dot{\phi}$ y $\ddot{\phi}$, respectivamente.

En el siguiente apartado se presenta el desarrollo matemático de los identificadores algebraicos para determinar los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete simplificado que se muestra en la [Figura 1](#). Los estimadores se desarrollaron bajo dos condiciones diferentes de operación del rotor: velocidad constante y velocidad en función del tiempo mediante una rampa de excitación de tipo lineal.

IDENTIFICADOR A VELOCIDAD CONSTANTE

La aplicación de la técnica de identificación algebraica requiere el modelo matemático del sistema, a partir del cual se desarrollan los identificadores correspondientes. El modelo matemático del sistema rotodinámico que considera como fuente de excitación una masa de desbalance y opera a velocidad constante, se obtiene a partir de la Ecuación (1) y se expresa como sigue:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\delta}\} + [\mathbf{C}(\Omega)]\{\dot{\delta}\} + [\mathbf{K}_1]\{\delta\} = m_u d \Omega^2 [\sin(\Omega t + \alpha) + \cos(\Omega t + \alpha)] \quad (2)$$

donde Ω es la velocidad de operación del rotor y se considera constante. A continuación, el esquema de identificación en el dominio del tiempo requiere que la Ecuación (2) se multiplique por el término t^2 y, posteriormente, el resultado se integre dos veces con respecto al tiempo t con la finalidad de obtener una ecuación en función únicamente del desplazamiento del sistema. Por lo tanto, la Ecuación (2) se transforma en:

$$\int^{(2)} [[\mathbf{M}]\{\ddot{\delta}\} + [\mathbf{C}_1 + \Omega\mathbf{C}_2]\{\dot{\delta}\} + [\mathbf{K}_1]\{\delta\}] t^2 = \int^{(2)} m_u d \Omega^2 \{\sin(\Omega t + \alpha) + \cos(\Omega t + \alpha)\} t^2 \quad (3)$$

donde las integrales que aparecen en la Ecuación (3) están expresadas en un formato simplificado, es decir, la integral $\int^{(2)} \psi(t)$ expresa una doble integración itera-

da en el tiempo, cuya forma completa se expresa como $\int_0^t \int_0^{\sigma_1} \psi(\sigma_2) d\sigma_2 d\sigma_1$ con $\int \psi(t) = \int_0^t \psi(\sigma) d\sigma$. Por otro lado, los términos a identificar de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete se encuentran en las matrices $[M]$, $[C_1]$ y $[K_1]$, respectivamente. Por lo tanto, después de la integración por partes del miembro izquierdo de la Ecuación (3) y de algún tratamiento algebraico se obtiene:

$$\begin{aligned} [M] \left[t^2 \{\delta\} - 4 \int t \{\delta\} + 2 \int^2 \{\delta\} \right] + \\ [C_1] \left[\int t^2 - 2 \int^2 t \{\delta\} + [K_1] \int^2 t^2 \{\delta\} = \right. \\ \Omega [C_2] \left[- \int t^2 \{\delta\} + 2 \int^2 t \{\delta\} \right] + \\ \left. m_u d \Omega^2 \int^2 \{\text{sen}(\Omega t + \alpha) + \text{cos}(\Omega t + \alpha)\} t^2 \right] \end{aligned} \quad (4)$$

La Ecuación (4) no se puede resolver debido a que para cada dirección (x y z) se tiene una ecuación con tres incógnitas, por lo que es necesario obtener dos ecuaciones más que sean linealmente independientes y que relacionen los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema. Las ecuaciones faltantes se obtienen al integrar la Ecuación (4) sucesivamente dos veces, las cuales se escriben como sigue:

$$\begin{aligned} [M] \left[\int t^2 \{\delta\} - 4 \int^2 t \{\delta\} + 2 \int^3 \{\delta\} \right] + \\ [C_1] \left[\int^2 t^2 - 2 \int^3 t \{\delta\} + [K_1] \int^3 t^2 \{\delta\} = \right. \\ \Omega [C_2] \left[- \int^2 t^2 \{\delta\} + 2 \int^3 t \{\delta\} \right] + \\ \left. m_u d \Omega^2 \int^3 \{\text{sen}(\Omega t + \alpha) + \text{cos}(\Omega t + \alpha)\} t^2 \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [M] \left[\int^2 t^2 \{\delta\} - 4 \int^3 t \{\delta\} + 2 \int^4 \{\delta\} \right] + \\ [C_1] \left[\int^3 t^2 - 2 \int^4 t \{\delta\} + [K_1] \int^4 t^2 \{\delta\} = \right. \\ \Omega [C_2] \left[- \int^3 t^2 \{\delta\} + 2 \int^4 t \{\delta\} \right] + \\ \left. m_u d \Omega^2 \int^4 \{\text{sen}(\Omega t + \alpha) + \text{cos}(\Omega t + \alpha)\} t^2 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

A partir de la Ecuación (4) y sus integraciones sucesivas, Ecuaciones (5) y (6), es posible formar un sistema de ecuaciones lineales para cada una de las direcciones coordenadas x y z . Estas ecuaciones toman esta forma:

$$[A(t)] \{\Theta\} = \{b(t)\} \quad (7)$$

donde $\{\Theta\} = \{m \ c \ k\}^T$ define el vector que contiene los parámetros desconocidos del sistema rotor-cojinete a

identificar y $[A(t)]$, $\{b(t)\}$ son matrices de 3×3 y 3×1 respectivamente, y se obtienen a partir de los términos de las integrales que conforman a las Ecuaciones (4), (5) y (6). Es importante especificar que tanto $[A(t)]$ como $\{b(t)\}$ están en función únicamente de la respuesta de vibración del rotor $\{\delta\}$. Asimismo, el vector de parámetros $\{\Theta\}$ es identificable algebraicamente si se satisface la condición $\det[A(t)] \neq 0$ establecida por Fliess y Sira-Ramírez [7]. En general, se ha demostrado ampliamente que esta condición se mantiene al menos en un intervalo pequeño de tiempo $(t_0, t_0 + \epsilon)$, donde ϵ es un valor positivo y suficientemente pequeño.

La solución de la Ecuación (7) produce el modelo matemático del identificador en línea de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema.

$$\{\Theta\} = [A^{-1}] \{b\} \ \forall t \in (t_0, t_0 + \epsilon) \quad (8)$$

De la Ecuación (8) es importante especificar que la identificación algebraica de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete es independiente de las condiciones iniciales del sistema y que solo depende del vector de desplazamientos para cada instante de tiempo. Cabe mencionar que los datos de entrada del modelo de identificación para una aplicación práctica se adquieren mediante sensores de desplazamiento que miden directamente la vibración del sistema.

IDENTIFICADOR A VELOCIDAD VARIABLE

Mediante un procedimiento similar al que se presenta en el apartado anterior es posible desarrollar el identificador algebraico de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez asumiendo que la velocidad del rotor es variable. Considere el modelo matemático del sistema rotodinámico que se muestra en la [Figura 1](#) y que se representa por la Ecuación (1), al multiplicar dicha ecuación por el término t^2 e integrar el resultado dos veces con respecto al tiempo se tiene:

$$\begin{aligned} [M] \left[t^2 \{\delta\} - 4 \int t \{\delta\} + 2 \int^2 \{\delta\} \right] + \\ [C_1] \left[\int t^2 - 2 \int^2 t \{\delta\} + [K_1] \int^2 t^2 \{\delta\} = \right. \\ [C_2] \left[- \int \dot{\phi} t + \int^2 (\ddot{\phi} t + 2\dot{\phi}) t \{\delta\} - [K_2] \int^2 \dot{\phi} t^2 \{\delta\} + \right. \\ \left. m_u d \int^2 \{\dot{\phi}^2 \text{sen}(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \text{cos}(\phi + \alpha)\} t^2 + \right. \\ \left. m_u d \int^2 \{\ddot{\phi} \text{sen}(\phi + \alpha) - \dot{\phi}^2 \text{cos}(\phi + \alpha)\} t^2 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

El desarrollo del identificador de los parámetros desconocidos del sistema bajo la condición de velocidad del rotor variable se lleva a cabo al integrar dos veces con respecto al tiempo a la Ecuación (9). Lo anterior con la finalidad de construir sistemas de ecuaciones lineales en la forma de la Ecuación (7) para las direcciones x y z del sistema.

La solución de las ecuaciones arrojará como datos de salida los parámetros desconocidos de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete. Por tanto, las ecuaciones adicionales correspondientes se expresan como sigue:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}] \left[\int t^2 \{\delta\} - 4 \int t \{\delta\} + 2 \int \{\delta\} \right] + & \quad (10) \\
 [\mathbf{C}_1] \left[\int t^2 - 2 \int t \right] \{\delta\} + [\mathbf{K}_1] \int t^2 \{\delta\} = & \\
 [\mathbf{C}_2] \left[- \int \dot{\phi} t + \int (\ddot{\phi} t + 2\dot{\phi}) \right] t \{\delta\} - [\mathbf{K}_2] \int \dot{\phi} t^2 \{\delta\} + & \\
 m_u d \int \{\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)\} t^2 + & \\
 m_u d \int \{\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) - \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)\} t^2 &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M}] \left[\int t^2 \{\delta\} - 4 \int t \{\delta\} + 2 \int \{\delta\} \right] + & \quad (11) \\
 [\mathbf{C}_1] \left[\int t^2 - 2 \int t \right] \{\delta\} + [\mathbf{K}_1] \int t^2 \{\delta\} = & \\
 [\mathbf{C}_2] \left[- \int \dot{\phi} t + \int (\ddot{\phi} t + 2\dot{\phi}) \right] t \{\delta\} - [\mathbf{K}_2] \int \dot{\phi} t^2 \{\delta\} + & \\
 m_u d \int \{\dot{\phi}^2 \sin(\phi + \alpha) - \ddot{\phi} \cos(\phi + \alpha)\} t^2 + & \\
 m_u d \int \{\ddot{\phi} \sin(\phi + \alpha) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi + \alpha)\} t^2 &
 \end{aligned}$$

A continuación, con las Ecuaciones de la (9) a la (11) es posible formar un sistema de ecuaciones linealmente independientes de la forma de la Ecuación (7). El sistema de ecuaciones resultante se puede resolver tal como se muestra en la Ecuación (8). Como resultado de la solución se obtienen los parámetros desconocidos del sistema: masa, amortiguamiento y rigidez. En la siguiente sección, se presentan los resultados de las simulaciones de los identificadores desarrollados en este apartado para las dos condiciones de velocidad de operación del rotor.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El esquema de la configuración del sistema rotor-cojinete utilizado en este trabajo para las simulaciones es el que se muestra en la [Figura 1](#). El rotor se compone de

un eje sólido circular uniforme de longitud L y un disco inercial que se ubica a una distancia l_1 , tal como se muestra en la figura, y además se considera como fuente de excitación un desbalance $m_u d$. Por otro lado, en la [Tabla 1](#) se presentan los valores de los parámetros físicos del sistema rotor-cojinete simplificado de dos grados de libertad que se muestra en la [Figura 1](#), y que son utilizados en la simulación de los identificadores algebraicos.

TABLA 1
PARÁMETROS FÍSICOS DEL SISTEMA ROTOR-COJINETE DE LA [FIGURA 1](#) ^[21]

$m = 14.29$ kg	$m_u = 1 \times 10^{-4}$ kg	$d = 0.15$ m
$\Omega = 1200$ rpm	$\ddot{\phi} = 10$ rad/s ²	$\alpha = 45^\circ$
$a = 2.871$ N·s ² /m	$c_x = c_z = 10$ N·s/m	$k_x = k_z = 1.195 \times 10^6$ N/m

Por simplificación para la simulación de los identificadores, se considera que los coeficientes rotodinámicos de los soportes son iguales para las direcciones x y z . Sin embargo, en aplicaciones reales estos valores serán diferentes, por lo cual, en el desarrollo de los identificadores propuestos en este trabajo los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de los soportes en las direcciones x y z se consideraron diferentes.

SIMULACIÓN DEL IDENTIFICADOR A VELOCIDAD CONSTANTE

La simulación de la identificación de parámetros se llevó a cabo al considerar la respuesta vibratoria del rotor como dato de entrada, para una velocidad de rotación constante del rotor de 1200 rpm. La respuesta vibratoria del sistema se obtiene al resolver la Ecuación (2) utilizando el método de integración numérica de Newmark. Cabe mencionar que el periodo de tiempo de muestreo utilizado fue de 0.1 ms. La [Figura 2](#) muestra las señales de vibración del sistema para la velocidad de rotación del rotor de 1200 rpm. Estas señales se tomaron como los datos de entrada que alimentan al identificador paramétrico que está especificado por la Ecuación (8).

En las [Figuras 3, 4 y 5](#) se muestra el comportamiento del identificador algebraico en función del tiempo, de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete, respectivamente. En las figuras, las líneas punteadas representan los valores reales asignados para los parámetros, mientras que la línea continua representa el valor identificado de los parámetros que se obtiene a partir de los modelos de identificación algebraica.

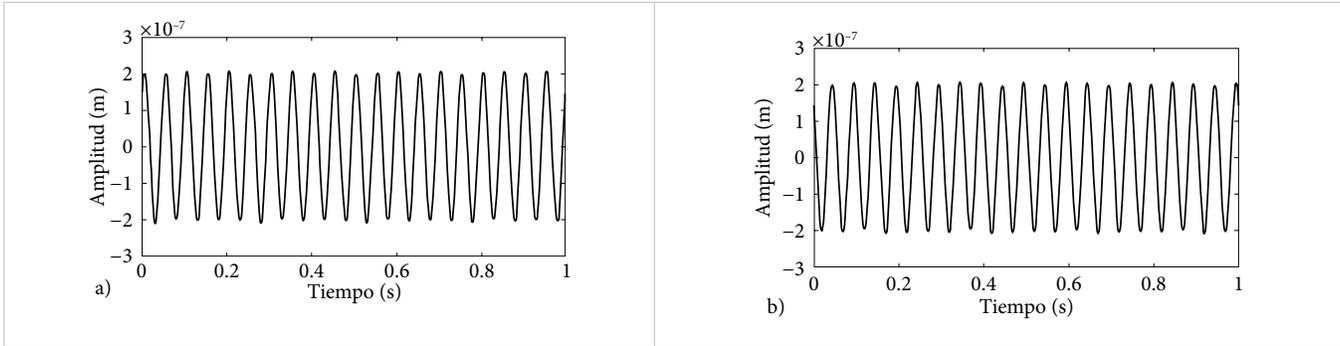


Figura 2. Respuesta vibratoria del sistema a velocidad constante $\Omega = 1200$ rpm: a) dirección x y b) dirección z .

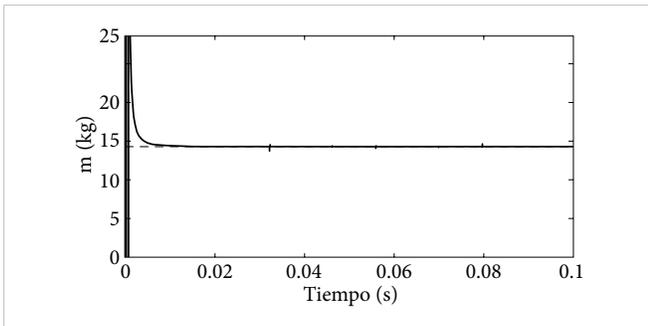


Figura 3. Identificación de la masa del sistema rotor-cojinete a velocidad constante $\Omega = 1200$ rpm.

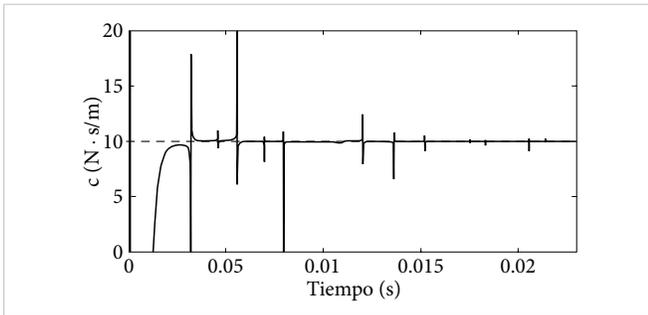


Figura 4. Identificación del amortiguamiento del sistema rotor-cojinete a velocidad constante $\Omega = 1200$ rpm.

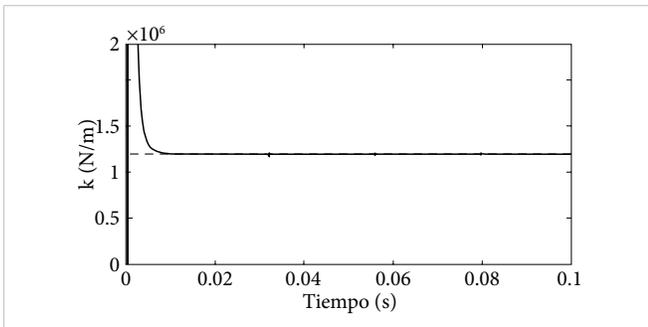


Figura 5. Identificación de la rigidez del sistema rotor-cojinete a velocidad constante $\Omega = 1200$ rpm.

Del análisis de las Figuras 3, 4 y 5 se observa que los modelos de identificación algebraica determinan satis-

factoriamente los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete en un tiempo menor a 0.2 segundos y una vez identificado el parámetro este se mantiene constante a lo largo del tiempo. Para un mejor análisis del comportamiento del identificador, en las figuras solo se muestran los resultados para un tiempo de 0.1 a 0.23 segundos, ya que es importante observar el tiempo que requiere el identificador para que converja al valor estimado.

SIMULACIÓN DEL IDENTIFICADOR A VELOCIDAD VARIABLE

Los parámetros físicos del sistema se determinaron mediante la simulación de los modelos de identificación paramétricos considerando como dato de entrada la respuesta vibratoria del rotor a velocidad variable, es decir, al considerar una rampa de excitación lineal con una aceleración angular de $\ddot{\phi} = 10$ rad/s². La señal de vibración del sistema se obtiene al resolver la Ecuación (1), utilizando el método de integración numérica de Newmark. Además, el periodo de tiempo de muestreo utilizado fue de 0.1 ms. En la Figura 6 se muestra la respuesta de vibración del sistema que alimentará al identificador, correspondiente a una aceleración angular de $\ddot{\phi} = 10$ rad/s².

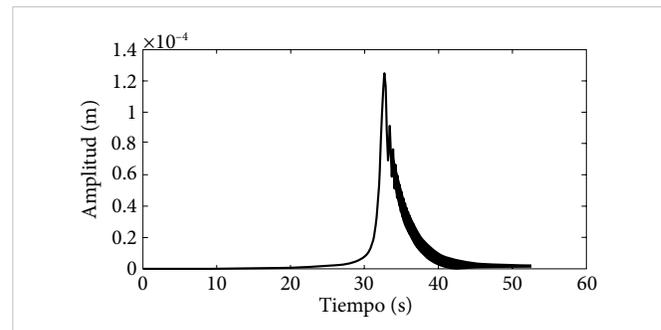


Figura 6. Respuesta de vibración del sistema rotor-cojinete en función del tiempo al considerar una rampa de excitación de tipo lineal con $\ddot{\phi} = 10$ rad/s².

Por otro lado, en las Figuras 7, 8 y 9 se muestran los resultados de la identificación algebraica de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete, respectivamente. En las figuras, la línea punteada representa los valores reales asignados, mientras que la línea continua representa el resultado obtenido de la estimación algebraica.

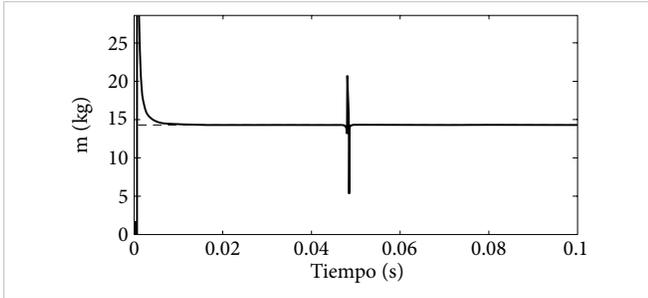


Figura 7. Identificación de la masa del sistema rotor-cojinete a velocidad variable, con rampa de excitación lineal $\dot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

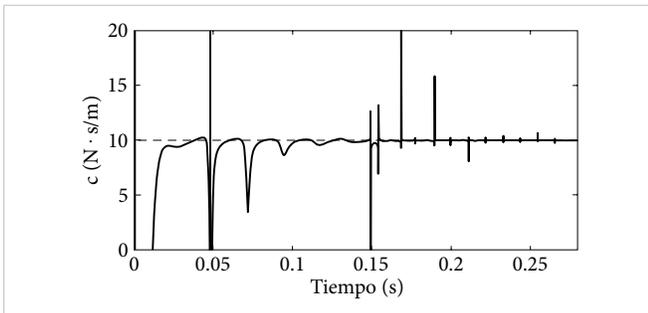


Figura 8. Identificación del amortiguamiento del sistema rotor-cojinete a velocidad variable, con rampa de excitación lineal $\dot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

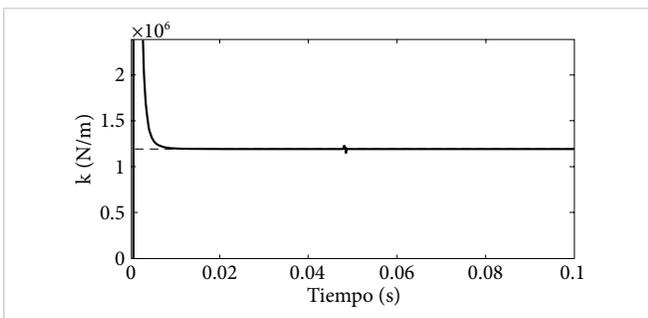


Figura 9. Identificación de la rigidez del sistema rotor-cojinete a velocidad variable, con rampa de excitación lineal $\dot{\phi} = 10 \text{ rad/s}^2$.

De los resultados que se muestran en las Figuras 7, 8 y 9 se observa que el comportamiento de los identificadores algebraicos de los parámetros del sistema a velocidad variable, es similar al comportamiento mostrado por los identificadores paramétricos a velocidad constante.

Además, la identificación de los parámetros de masa y rigidez se realizó en un tiempo menor a 0.1 segundos, valor que coincide con los tiempos de identificación reportados en la literatura. Sin embargo, el tiempo que tarda el identificador propuesto para la estimación del amortiguamiento es menor a 0.28 segundos. Asimismo, se identificaron algunos factores que influyen en la rapidez con la que los identificadores algebraicos determinan los parámetros desconocidos del sistema. Estos factores son la no linealidad del sistema, el método de integración utilizado tanto para el cálculo de la respuesta del sistema como para los identificadores algebraicos y el paso de integración. De hecho, estos mismos factores influyen en la presencia de perturbaciones y el comportamiento transitorio que se observa en las gráficas de las Figuras 4, 7 y 8.

Por otro lado, la estimación de los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez de los sistemas rotor-cojinete ayudan en la calibración de los modelos matemáticos que rigen su dinámica, lo cual mejora la predicción de su comportamiento dinámico, es decir, se podría obtener una mejor aproximación del cálculo de sus frecuencias naturales y formas modales, así como de su respuesta vibratoria ante diversas perturbaciones, como en el caso del desbalance.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se presenta el desarrollo de dos identificadores algebraicos, cuya función es determinar los parámetros desconocidos de masa, amortiguamiento y rigidez de un sistema rotor-cojinete tipo Jeffcott de dos grados de libertad, como el que se muestra en la Figura 1. Las simulaciones de los identificadores muestran que es posible determinar los parámetros de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema rotor-cojinete únicamente utilizando la respuesta vibratoria del sistema. Además, las simulaciones se realizaron considerando dos condiciones de operación del rotor: velocidad constante y velocidad variable.

La identificación de los parámetros de masa y rigidez se realizó en un tiempo menor a 0.1 segundos, lo que es consistente con la rapidez de los identificadores reportados en la literatura. Por otro lado, la estimación del amortiguamiento para las dos condiciones de operación del sistema rotor-cojinete se llevó a cabo en un tiempo menor a 0.28 segundos. Adicionalmente, se observó que la rapidez con la que los identificadores deter-

minan la magnitud del parámetro a identificar depende en buena medida de la no linealidad del sistema y del método y el paso de integración utilizado en las simulaciones.

También, en los resultados de la identificación paramétrica es posible observar que el identificador muestra un comportamiento transitorio al inicio de la identificación, por ejemplo, este comportamiento transitorio es más notorio en las Figuras 4 y 8. Esto se debe en buena medida a los métodos de integración utilizados, tanto para la solución del modelo dinámico del sistema rotor-cojinete como para la solución de los identificadores algebraicos, así como el paso de integración utilizado en las soluciones.

REFERENCIAS

- [1] C. P. Moreno y P. Thomson, "Incertidumbre Paramétrica en Modelos Dinámicos de Estructuras Civiles", *Ingeniería y Competitividad*, vol. 12, n.º 1, pp. 111-125, 2010, doi: [10.25100/iyv.v12i1.2705](https://doi.org/10.25100/iyv.v12i1.2705).
- [2] H. Sira-Ramírez, C. García-Rodríguez, J. Cortés-Romero y A. Luviano-Juárez, *Algebraic Identification and Estimation Methods in Feedback Control Systems*. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd, 2014.
- [3] L. Ljung, *Systems Identification: Theory for the User*. Englewood Cliffs, Nueva Jersey: Prentice-Hall, 1987.
- [4] T. Söderström y P. Stoica, *System Identification*. Nueva York: Prentice-Hall, 1989.
- [5] S. Sagara y Z.-Y. Zhao, "Recursive identification of transfer function matrix in continuous systems via linear integral filter", *Int. J. Control*, vol 50, n.º 2, pp. 457-477, 1989, doi: [10.1080/00207178908953377](https://doi.org/10.1080/00207178908953377).
- [6] S. Sagara y Z.-Y. Zhao, "Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems", *Automatica*, vol. 26, n.º 1, pp. 63-74, en. 1990, doi: [10.1016/0005-1098\(90\)90158-E](https://doi.org/10.1016/0005-1098(90)90158-E).
- [7] M. Fliess y H. Sira-Ramírez, "An algebraic framework for linear identification", *ESAIM: COCV*, vol. 9, pp. 151-168, feb. 2003, doi: [10.1051/cocv:2003008](https://doi.org/10.1051/cocv:2003008).
- [8] A. Blanco-Ortega, F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro y H. Méndez-Azúa, "Control de Vibraciones en Maquinaria Rotatoria", *Rev. Iberoam. Autom. Inform. Ind.*, vol. 7, n.º 4, pp. 36-43, 2010, doi: [10.1016/S1697-7912\(10\)70058-3](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(10)70058-3).
- [9] M. Arias-Montiel, F. Beltrán-Carbajal y G. Silva-Navarro, "On-line algebraic identification of eccentricity parameters in active rotor-bearing systems", *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 85, pp. 152-159, ag. 2014, doi: [10.1016/j.ijmecsci.2014.05.027](https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.05.027).
- [10] J. Colín, J. G. Mendoza, A. Blanco, A. Abúndez y E. S. Gutiérrez, "Determinación del Desbalance en Sistemas Rotor-cojinete a velocidad constante: Método de Identificación Algebraica", *Ingenier. mecáni. tecnolog. desarroll.*, vol. 5, n.º 4, pp. 385-394, 2016.
- [11] J. G. Mendoza, J. Colín, A. Blanco, A. Abúndez y E. S. Gutiérrez, "Balanceo Automático de un Sistema Rotor-Cojinete: Identificador Algebraico en Línea del Desbalance Para un Sistema Rotodinámico", *Rev. Iberoam. Autom. Inform. Ind.*, vol. 13, n.º 3, pp. 281-292, 2016, doi: [10.1016/j.riai.2016.03.004](https://doi.org/10.1016/j.riai.2016.03.004).
- [12] L. A. Baltazar-Tadeo et al., "An Integrated Balancing Method for Asymmetric Rotor-Bearing Systems: Algebraic Identification, Modal Balancing, and Active Balancing Disks", *J. Vib. Eng. Technol.*, vol. 11, n.º 2, pp. 619-645, jul. 2022, doi: [10.1007/s42417-022-00598-6](https://doi.org/10.1007/s42417-022-00598-6).
- [13] J. G. Mendoza-Larios et al., "An Algebraic Approach for Identification of Rotordynamic Parameters in Bearings with Linearized Force Coefficients", *Mathematics*, vol. 9, n.º 21, pp. 27-47, oct. 2021, doi: [10.3390/math9212747](https://doi.org/10.3390/math9212747).
- [14] S. J. Landa-Damas et al., "A simplified Model for the On-Line Identification of Bearing Direct-Dynamic Parameters Based on Algebraic Identification (AI)", *Mathematics*, vol. 11, n.º 14, 3131, jul. 2023, doi: [10.3390/math11143131](https://doi.org/10.3390/math11143131).
- [15] J. R. Trapero, H. Sira-Ramírez y V. Feliu, "An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal", *Signal Processing*, vol. 87, n.º 6, pp. 1188-1201, jun. 2007, doi: [10.1016/j.sigpro.2006.10.006](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2006.10.006).
- [16] F. Beltrán-Carbajal, G. Silva-Navarro y M. Arias-Montiel, "Control Activo de Vibraciones en un Rotor Tipo Jeffcott con Velocidad Variable Usando una Suspensión Electromecánica", *Rev. Iberoam. Autom. Inform. Ind.*, vol. 11, n.º 3, pp. 295-303, jul. 2014, doi: [10.1016/j.riai.2014.05.002](https://doi.org/10.1016/j.riai.2014.05.002).

- [17] J. Kasac, T. Zilic, V. Milic y A. Jokic, “Frequency-shifting-based stable on-line algebraic parameter identification of linear systems”, *J. Frank. Inst.*, vol. 355, n.º 18, pp. 9224-9244 dic. 2018, doi: [10.1016/j.jfranklin.2017.03.008](https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2017.03.008).
- [18] L. G. Trujillo-Franco, G. Silva-Navarro y F. Beltrán-Carbajal, “Algebraic Parameter Identification of Nonlinear Vibrating Systems and Non-Linearity Quantification Using the Hilbert Transformation”, *Mathematics*, vol. 2021, n.º 4, 5595453, jun. 2021, doi: [10.1155/2021/5595453](https://doi.org/10.1155/2021/5595453).
- [19] F. Beltran-Carbajal, H. F. Abundis-Fong, L. G. Trujillo-Franco, H. Yañez-Badillo, A. Favela-Contreras y E. Campos-Mercado, “Online Frequency Estimation on a Building-like Structure Using a Nonlinear Flexible Dynamic Vibration Absorber”, *Mathematics*, vol. 10, n.º 5, feb. 2022, doi: [10.3390/math10050708](https://doi.org/10.3390/math10050708).
- [20] F. Beltran-Carbajal, R. Tapia-Olvera, A. Valderrabano-Gonzalez y H. Yañez-Badillo, “An asymptotic and algebraic estimation method of harmonics”, *Electr. Power Syst. Res.*, vol. 206, 107771, may. 2022, doi: [10.1016/j.epsr.2022.107771](https://doi.org/10.1016/j.epsr.2022.107771).
- [21] M. Lalanne, G. Ferraris. *Rotordynamics prediction in engineering*, 2.ª, ed. John Wiley & Sons, 1998.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado parcialmente por la Universidad Tecnológica de la Mixteca.